MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE

53. BULGARIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

FINAL ROUND

First day, May 15, 2004

Problema 1. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi A_1, B_1 şi C_1 puncte arbitrare pe segmentele (AI), (BI), respectiv (CI). Mediatoarele segmentelor AA_1, BB_1 şi CC_1 se intersectează în A_2, B_2 şi respectiv C_2. Arătați că centrul cercului circumscris triunghiului $A_2B_2C_2$ coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC dacă şi numai dacă I este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$.

Problema 2. Pentru orice număr natural nenul n, suma $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ se scrie sub forma $\frac{p_n}{q_n}$ unde p_n şi q_n sunt numere naturale prime între ele.

(a) Arătați că p_{67} nu se divide cu 3.

(b) Determinați toate numerele naturale nenule n, pentru care p_n este divizibil cu 3.

Problema 3. Un grup este format din n turişti. Oricum am alege 3 turişti, există 2 dintre ei care nu se cunosc. Pentru orice partiție a turiştilor în două autobuze putem găsi doi turişti care se cunosc şi sunt în acelaşi autobuz. Demonstrați că în grupul de turişti există un turist care are cel mult $\frac{2}{5}n$ cunoscuți.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 minute.